高校数学の復習

第10回
三角関数の加法定理

Voiced by https://coefont.studio

本時の目標

１　三角関数の加法定理を理解し，$\frac{\pi}{12}$ や $\frac{5\pi}{12}$ などの角の三角関数の値を求められるようになります

２　２倍角の公式・半角の公式を理解し，式の変形に用いられるようになります

３　三角関数の合成ができるようになります

加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

咲いたコスモス
コスモス咲いた

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

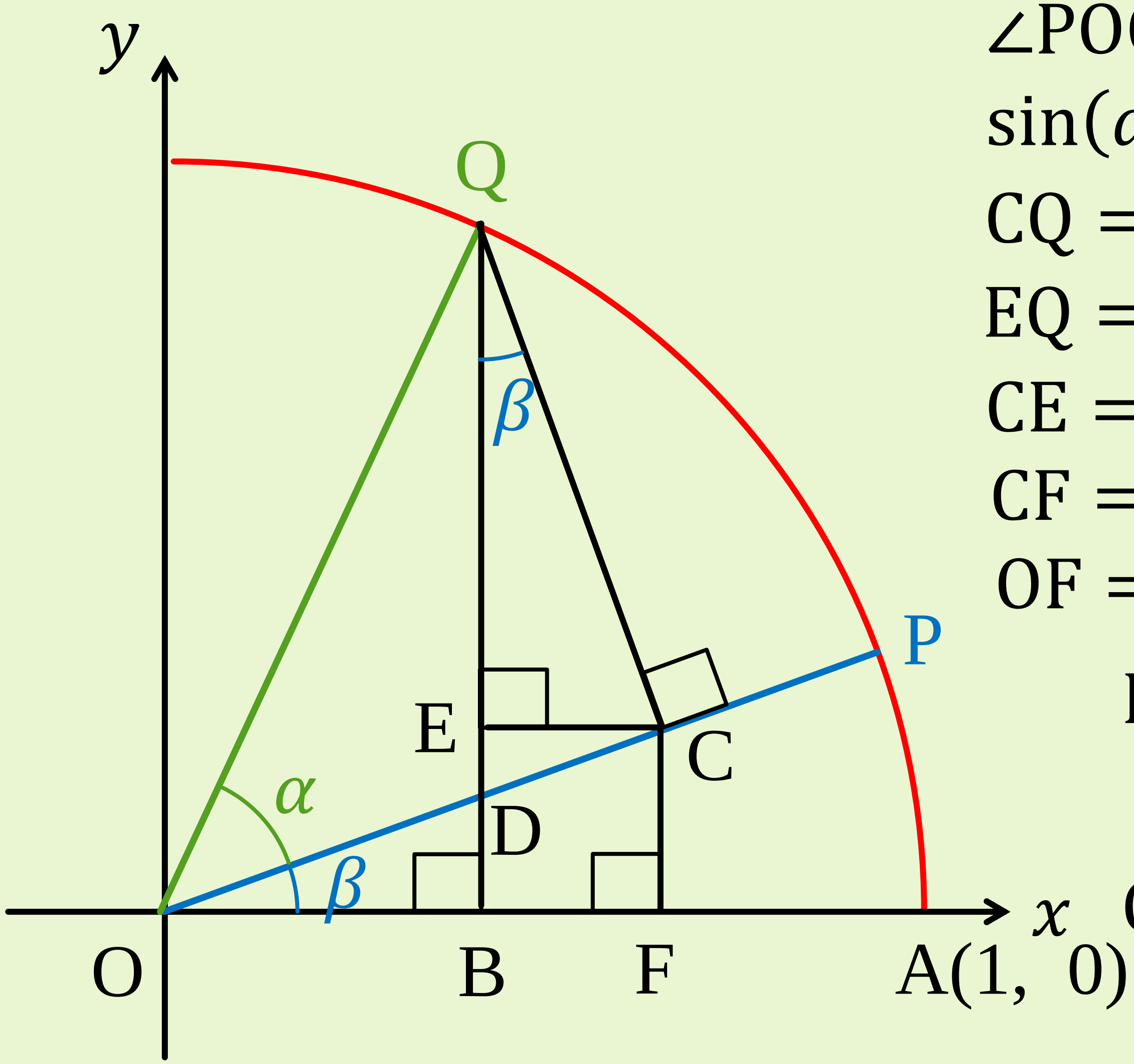
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

コスモスコスモス
まぁ咲いた咲いた

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

加法定理の証明もどき



$\angle POQ = \alpha, \angle AOP = \beta, \angle AOQ = \alpha + \beta$

$\sin(\alpha+\beta) = BQ, \cos(\alpha+\beta) = OB \cdots (1)$

$CQ = \sin\alpha, OC = \cos\alpha \cdots (2)$

$EQ = CQ\cos\beta = \sin\alpha\cos\beta \cdots (3)$

$CE = CQ\sin\beta = \sin\alpha\sin\beta \cdots (4)$

$CF = OC\sin\beta = \cos\alpha\sin\beta \cdots (5)$

$OF = OC\cos\beta = \cos\alpha\cos\beta \cdots (6)$

$BQ = EQ + BE = EQ + CF$ より

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$OB = OF - BF = OF - CE$ より

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Voiced by https://coefont.studio

加法定理の証明もどき

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$
$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$
$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

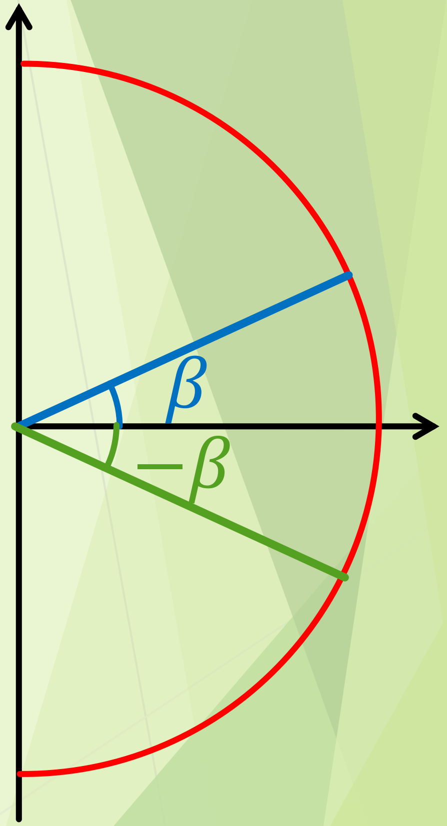
$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}}+\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

加法定理の証明もどき

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin(-\beta)=-\sin\beta \quad \cos(-\beta)=\cos\beta \quad \tan(-\beta)=-\tan\beta$$



$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

π/12 の三角関数の値

例題１　$\sin\frac{\pi}{12}$，　$\cos\frac{\pi}{12}$，　$\tan\frac{\pi}{12}$ の値を求めましょう

$$\frac{\pi}{12}=\frac{4\pi-3\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$$ から

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{6-2\sqrt{12}+2}{4}=2-\sqrt{3}$$

2倍角の公式

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$\alpha=\beta=\theta$ とすると

$$\sin 2\theta = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から $(= 1 - 2\sin^2\theta \quad = 2\cos^2\theta - 1)$

$$\tan 2\theta = \frac{\tan\theta+\tan\theta}{1-\tan\theta\tan\theta} = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$