

# 高校数学の復習

## 第5回 二次方程式



# 本時の目標

- 1 方程式と恒等式の違いから方程式の解の意味を理解します
- 2 因数分解により2次方程式の解を求められるようになります
- 3 解の公式を理解するとともに、複素数について理解します

# 恒等式と方程式

## 恒等式

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$x = 1$  のとき, 左辺 = 4, 右辺 = 4

$x = 2$  のとき, 左辺 = 9, 右辺 = 9

$x = 3$  のとき, 左辺 = 16, 右辺 = 16

## 方程式

$$x^2 + 2 = 3x$$

$x = 1$  のとき, 左辺 = 3, 右辺 = 3

$x = 2$  のとき, 左辺 = 6, 右辺 = 6

$x = 3$  のとき, 左辺 = 11, 右辺 = 9

# 恒等式と方程式

## 恒等式

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

→ 任意の  $x$  の値について成り立つ

## 方程式

$$x^2 + 2 = 3x$$

→ 特定の  $x$  の値についてのみ成り立つ

方程式を解く = 解をすべて求める

求めた解以外に解のないことを示さなければならない

# 因数分解と方程式

$$x^2 + 2 = 3x$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

$$x - 1 = 0, \quad x - 2 = 0$$

$$\therefore x = 1, \quad x = 2$$

数の性質

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ or } b = 0$$

例題 1  $2x^2 - 5x + 2 = 0$

$$\begin{array}{r} 1 \times -2 \quad -4 \\ 2 \times -1 \quad -1 \\ \hline -5 \end{array}$$

$$(x - 2)(2x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 2, \quad x = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{3}$$

# 解の公式

$$x^2 - a = 0 \quad (a > 0)$$

$$x = \pm\sqrt{a} \dots (*)$$

$ax^2 + bx + c = 0$  の解

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$\underline{4a^2x^2 + 4abx} + b^2 - b^2 + 4ac = 0$$

$$(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac) = 0$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

# 解の公式

例題2  $x^2 - 5x + 2 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$x^2 + 4x - 2 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$$

# 解の公式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$b = 2b'$$

$$ax^2 + 2b'x + c = 0$$

$$x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= -2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \cdot (-2)} \\ &= -2 \pm \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b' \pm \sqrt{4(b'^2 - ac)}}{2a} \\ &= \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} \\ &= \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \end{aligned}$$



# 解の公式（虚数の解）

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad D = b^2 - 4ac$$

例題 3  $x^2 - x + 1 = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

## 複素数について

- 虚数単位  $i$  は  $i^2 = -1$  をみたす数
- 複素数とは、実数  $a$  と  $b$  , さらに虚数単位  $i$  を用いて  $a + bi$  と表される数
- 二次方程式を扱う際には
$$\sqrt{-\alpha} = \sqrt{\alpha}i \quad (\alpha < 0)$$
とする