高校数学の復習

第11回
指数の拡張と計算

Voiced by https://coefont.studio

本時の目標

指数を，自然数から整数，そして有理数に拡張し，有理数の指数を用いた式の計算ができるようになります

Voiced by https://coefont.studio

累乗と指数，そして指数法則

$2\times 2=2^2$　$2\times 2\times 2=2^3$ →２の累乗

$2\times 2\times 2\times 2=2^{\boxed{4}}$→指数

指数法則

1　$a^m\times a^n=a^{m+n}$

2　$a^m\div a^n=a^{m-n}\ (m>n)$

3　$(a^m)^n=a^{mn}$

4　$(ab)^n=a^n\,b^n$

累乗と指数，そして指数法則

$2 \times 2 = 2^2 \qquad 2 \times 2 \times 2 = 2^3$ →２の累乗

$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{\boxed{4}}$→指数

指数法則

１　$a^m \times a^n = a^{m+n}$

２　$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (m > n)$

３　$(a^m)^n = a^{mn}$

４　$(ab)^n = a^n b^n$

Voiced by https://coefont.studio

累乗と指数，そして指数法則

$2 \times 2 = 2^2$　　$2 \times 2 \times 2 = 2^3$ →２の累乗

$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{\boxed{4}}$→指数

指数法則

1　$a^m \times a^n = a^{m+n}$

2　$a^m \div a^n = a^{m-n}$ $(m > n)$

3　$(a^m)^n = a^{mn}$

4　$(ab)^n = a^n b^n$

Voiced by https://coefont.studio

累乗と指数，そして指数法則

$2 \times 2 = 2^2$　　$2 \times 2 \times 2 = 2^3$ → 2 の累乗

$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{\boxed{4}}$ → 指数

指数法則

1　$a^m \times a^n = a^{m+n}$

2　$a^m \div a^n = a^{m-n}$ $(m > n)$

3　$(a^m)^n = a^{mn}$

4　$(ab)^n = a^n b^n$

Voiced by https://coefont.studio

累乗と指数，そして指数法則

$2\times 2=2^2$　$2\times 2\times 2=2^3$ →２の累乗

$2\times 2\times 2\times 2=2^{\boxed{4}}$→指数

指数法則

1　$a^m\times a^n=a^{m+n}$

2　$a^m\div a^n=a^{m-n}\ (m>n)$

3　$(a^m)^n=a^{mn}$

4　$(ab)^n=a^n\,b^n$

Voiced by https://coefont.studio

累乗と指数，そして指数法則

$2 \times 2 = 2^2 \quad 2 \times 2 \times 2 = 2^3$ →２の累乗

$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{\boxed{4}}$→指数

指数法則

1　$a^m \times a^n = a^{m+n}$

2　$a^m \div a^n = a^{m-n} \ (m > n)$

3　$(a^m)^n = a^{mn}$

4　$(ab)^n = a^n b^n$

指数の拡張

a^0 について

指数法則の１において $n=0$ とすると

$$a^m \times a^0 = a^{m+0}$$

$$a^m \times a^0 = a^m$$

$$\therefore\ a^0 = 1$$

逆に $a^0=1$ とすると，指数法則の２～４にも矛盾しない

ゆえに，$a^0=1$ と定義することができる

指数法則

1　$a^m \times a^n = a^{m+n}$

2　$a^m \div a^n = a^{m-n}\ (m>n)$

3　$(a^m)^n = a^{mn}$

4　$(ab)^n = a^n b^n$

Voiced by https://coefont.studio

指数の拡張（負の指数）

a^{-n} について

指数法則の１において
$m=-n$ とすると

$$a^{-n}\times a^{n}=a^{-n+n}$$

$$a^{-n}\times a^{n}=a^{0}=1$$

$$\therefore\ a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$$

ゆえに，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^{n}}$ と定義することができる

指数法則

1	$a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}$
2	$a^{m}\div a^{n}=a^{m-n}\ (m>n)$
3	$(a^{m})^{n}=a^{mn}$
4	$(ab)^{n}=a^{n}\,b^{n}$

指数の拡張

a の累乗は，任意の整数の指数について定義でき

任意の整数 m，n について次のことが成り立つ

1　$a^0 = 1$

2　$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

3　$a^m \times a^n = a^{m+n}$

4　$a^m \div a^n = a^{m-n}$

5　$(a^m)^n = a^{mn}$

6　$(ab)^n = a^n\, b^n$

累乗根

$a \geq 0$ として $x^2 = a$ をみたす x を a の平方根といい

平方根のうち正のものを $\sqrt{a}$ と表しました

$x^3 = a$ をみたす x は三つあって，これを a の立方根

または３乗根といいます

$x^3 = 8$

$x^3 - 8 = 0$

$(x-2)(x^2+2x+4) = 0$

$\therefore \quad x = 2\,,\ \ -1 \pm \sqrt{3}\,i$

立方根のうち，実数になるものは一つだけ… $\sqrt[3]{}$

$\sqrt[3]{8} = 2 \qquad \sqrt[3]{5} \to \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$

$\sqrt[n]{a} \to \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$（正の実数）

Voiced by https://coefont.studio

指数の拡張（有理数の指数）

$a^{\frac{p}{q}}$ について

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad \leftarrow m = \frac{p}{q}, n = q$$

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^{\frac{p}{q}\cdot q} = a^p$$

$a^{\frac{p}{q}}$：q 乗すると a^p になる数

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

指数法則

1 $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2 $a^m \div a^n = a^{m-n}$

3 $(a^m)^n = a^{mn}$

4 $(ab)^n = a^n\,b^n$

Voiced by https://coefont.studio

指数法則を用いた計算

例題１　$15^8 \div 3^7 \times 5^{-6}$

$= (3 \times 5)^8 \times 3^{-7} \times 5^{-6}$

$= 3^8 \times 5^8 \times 3^{-7} \times 5^{-6}$

$= 3^8 \times 3^{-7} \times 5^8 \times 5^{-6}$

$= 3^{8-7} \times 5^{8-6}$

$= 3^1 \times 5^2$

$= 75$

指数法則を用いた計算

例題２　$(4a^{-2}b^{-1})^2 \times (2a^{-3}b^{-4})^{-2}$

$= (2^2)^2 \times a^{-4} \times b^{-2} \times 2^{-2} \times a^6 \times b^8$

$= 2^4 \times 2^{-2} \times a^{-4} \times a^6 \times b^{-2} \times b^8$

$= 2^{4-2} \times a^{-4+6} \times b^{-2+8}$

$= 2^2 \times a^2 \times b^6$

$= 4\,a^2\,b^6$

指数法則を用いた計算

例題３　$\dfrac{\sqrt[6]{27} \times \sqrt[6]{27^{-2}}}{\sqrt[6]{27^{-1}}}$

$$= \frac{(3^3)^{\frac{1}{6}} \times (3^3)^{-\frac{2}{6}}}{(3^3)^{-\frac{1}{6}}}$$

$$= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-1} \times 3^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3^{\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}} = 3^0 = 1$$

指数法則を用いた計算

例題４　$\dfrac{\sqrt[6]{ab^3} \times \sqrt{a^3 b}}{\sqrt[3]{a^2 b^3}}$

$$= (ab^3)^{\frac{1}{6}} \times (a^3 b)^{\frac{1}{2}} \times (a^2 b^3)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{2}{3}} b^{-1}$$

$$= a^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{3}{2}} \times a^{-\frac{2}{3}} \times b^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} \times b^{-1}$$

$$= a^{\frac{1}{6}+\frac{9}{6}-\frac{4}{6}}\, b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} = a^1\, b^0 = a$$

Voiced by https://coefont.studio