高校数学の復習

第12回
対数の計算

Voiced by https://coefont.studio

本時の目標

１　対数の定義を確認し，理解します

２　指数法則から対数の計算規則を導き，対数の計算をすることができるようになります

指数方程式と対数

基本的な指数方程式の例　$4^x = 8$

$4 = 2^2$，$8 = 2^3$　から　$2^{2x} = 2^3 \cdots (1)$

$\boxed{\begin{array}{l} 0 < a < 1, 1 < a \quad \text{かつ} \quad b > 0 \quad \text{のとき,} \\ \qquad a^x = b \ \text{をみたす} \ x \ \text{は，ただ一つである} \end{array}}$

(1) から　$2x = 3$　　$\therefore x = \dfrac{3}{2}$

$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b$　　　$\log_4 8 = \dfrac{3}{2}$

（ログａ底のｂ）

Voiced by https://coefont.studio

対数の定義

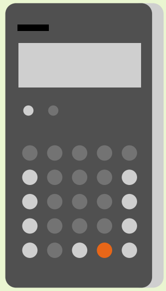
$0 < a < 1, 1 < a$　かつ　$b > 0$　のとき,

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$　ａを底とするｂの対数

$\log_{\boxed{a}} \boxed{b}$ 真数（正の数）

底（１以外の正の数）

$2^3 = 8 \quad \therefore \log_2 8 = 3 \qquad \log_2 7 = ? \qquad 2^? = 7$



$\log_2 7 = 2.807354922 \qquad 2^{2.807354922} = 7$

Voiced by https://coefont.studio

対数の定義

$0 < a < 1, 1 < a$　かつ　$b > 0$　のとき,

$$a^x = b \iff x = \log_a b$$

$\log_2 7 = 2.807354922\cdots$

$2^{2.8} = 2^{\frac{28}{10}} = \sqrt[10]{2^{28}}$ $(= 6.964404506)$

$2^{2.807} = 2^{\frac{2807}{1000}} = \sqrt[1000]{2^{2807}}$ $(= 6.99827119)$

$2^{2.8073} = 2^{\frac{28073}{10000}} = \sqrt[10000]{2^{28073}}$ $(= 6.999733522)$

$\log_2 7$

$2^{2.80735492} = 6.999999999$　　$2^{2.807354922} = 7$

$2^3 = 8$ ですから，3 より少し小さい数に $2^x = 7$ となる x がある

Voiced by https://coefont.studio

対数の計算規則

$0 < a < 1, 1 < a \quad M > 0 \quad N > 0 \quad r > 0$

$\log_a M = m \quad \log_a N = n$ とおく

$a^m = M \,, \quad a^n = N \quad \cdots (1)$

指数法則　$a^m \times a^n = a^{m+n}$　に (1) を代入

$MN = a^{m+n} \quad \log_a MN = m + n \quad \therefore\ \log_a MN = \log_a M + \log_a N$

指数法則　$a^m \div a^n = a^{m-n}$　に (1) を代入

$\frac{M}{N} = a^{m-n} \quad \log_a \frac{M}{N} = m - n \quad \therefore\ \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

指数法則　$(a^m)^r = a^{mr}$　に (1) を代入

$M^r = a^{rm} \quad \log_a M^r = rm \quad \therefore\ \log_a M^r = r\log_a M$

Voiced by https://coefont.studio

対数の計算規則

$a^0 = 1 \qquad a^1 = a$

$\log_a b = x$　とおく

$a^x = b$

$\log_c a^x = \log_c b$

$x \log_c a = \log_c b$

$x = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$　　$\therefore \log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$

$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

$\log_a M^r = r\log_a M$

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \begin{pmatrix} c > 0 \\ c \neq 1 \end{pmatrix}$

《底の変換公式》

Voiced by https://coefont.studio

対数の計算

例題１　$\log_2 8$

$\log_2 8 = x$　とおけば

$2^x = 8 \quad 2^x = 2^3 \quad \therefore\ x = 3$

$$\log_2 8 = \log_2 2^3$$
$$= 3\log_2 2$$
$$= 3$$

例題２　$\log_4 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \dfrac{3\log_2 2}{2\log_2 2} = \dfrac{3}{2}$

例題３　$2\log_6 3 + \log_6 8 - \log_6 2$

$$= \log_6 3^2 + \log_6 2^3 + \log_6 2^{-1}$$
$$= \log_6 3^2 \times 2^3 \times 2^{-1}$$
$$= \log_6 6^2$$
$$= 2\log_6 6$$
$$= 2$$

Voiced by https://coefont.studio