高校数学の復習

第13回
ベクトル

Voiced by https://coefont.studio

本時の目標

１　ベクトルが，大きさと方向をもった量であり，有向線分で表されることを理解するとともに，ベクトルの実数倍と加減算を有効線分で表せるようになります

２　平面上のベクトルについて，成分表示を理解するとともに，成分を用いて実数倍と加減算を求められるようになります

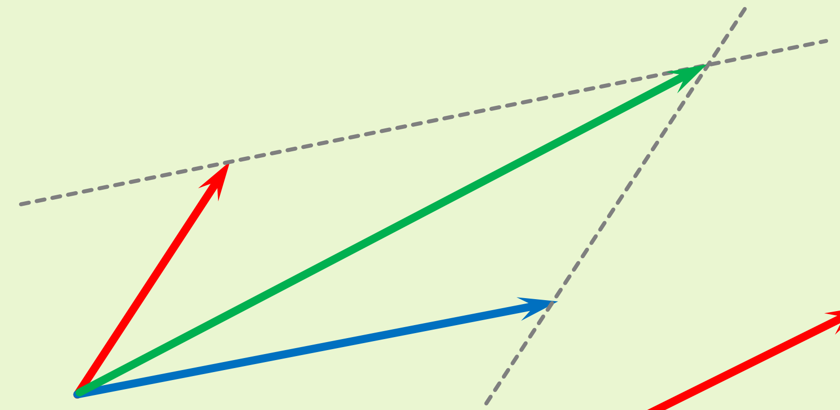
３　平面上では，平行でない２つのベクトルを用いて任意のベクトルを表せることを理解するとともに，成分を用いて任意のベクトルを平行でない２つのベクトルで表せるようになります

４　２つのベクトルの内積を理解するとともに，成分表示された２つのベクトルのなす角を求められるようになります

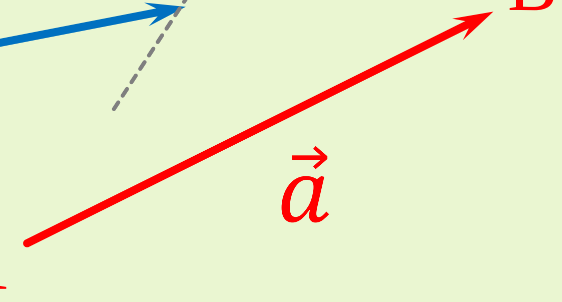
Voiced by https://coefont.studio

力とベクトル

例題１　図のように，点 A に二つの力が作用しています
　　　二つの力の合力を作図しましょう



ベクトル：　向きと大きさの要素をもつ量
　　　　　　有向線分で表される



$\vec{a}$ や $\vec{b}$ などの記号により表す

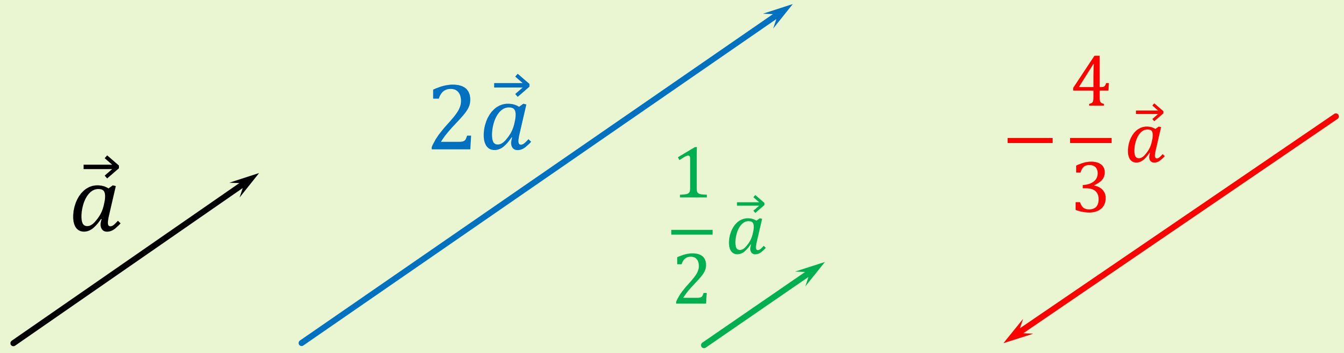
$\vec{a}$ の大きさは $|\vec{a}|$ と書いて，有向線分の長さで表す

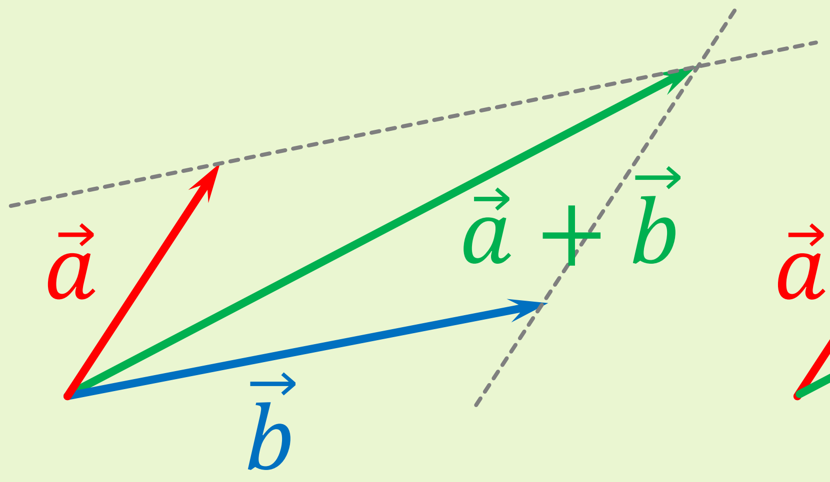
点Aを $\vec{a}$ の始点，点Bを $\vec{a}$ の終点といい $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ と表す

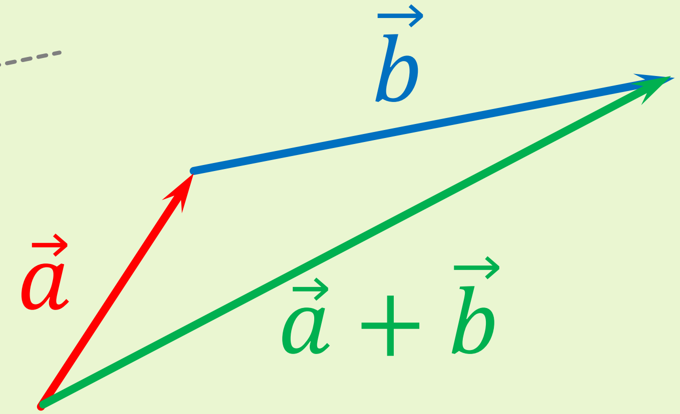
Voiced by https://coefont.studio

ベクトルの実数倍，和と差

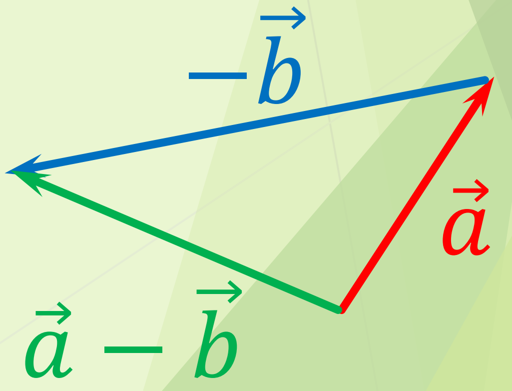
伸ばして縮めてつなぐ！







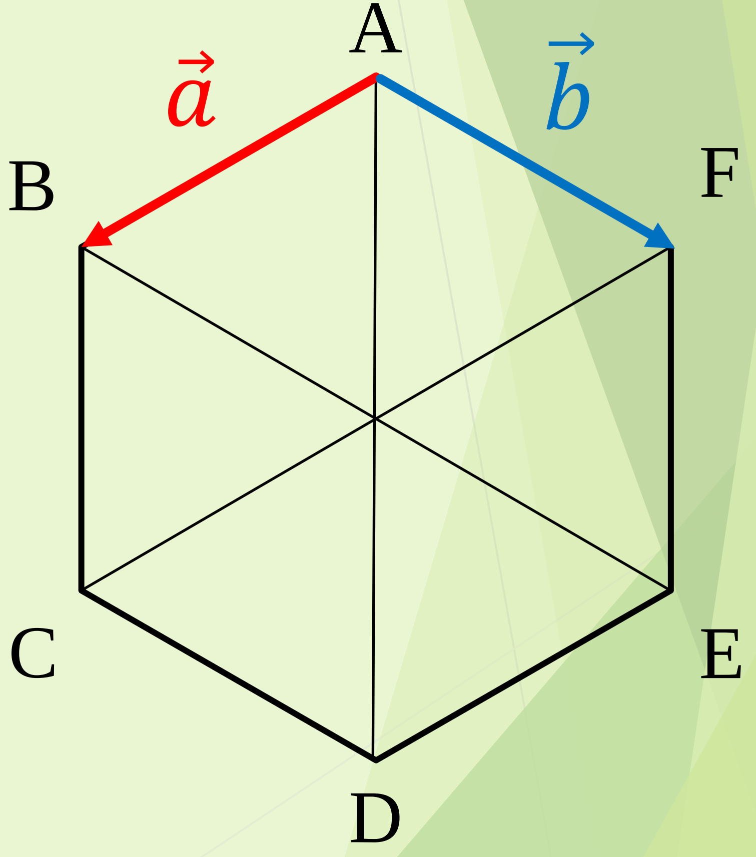
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$$



Voiced by https://coefont.studio

ベクトルの実数倍，和と差

例題２　図のような正六角形において
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$ とするとき，次の
ベクトルを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表しましょう



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$

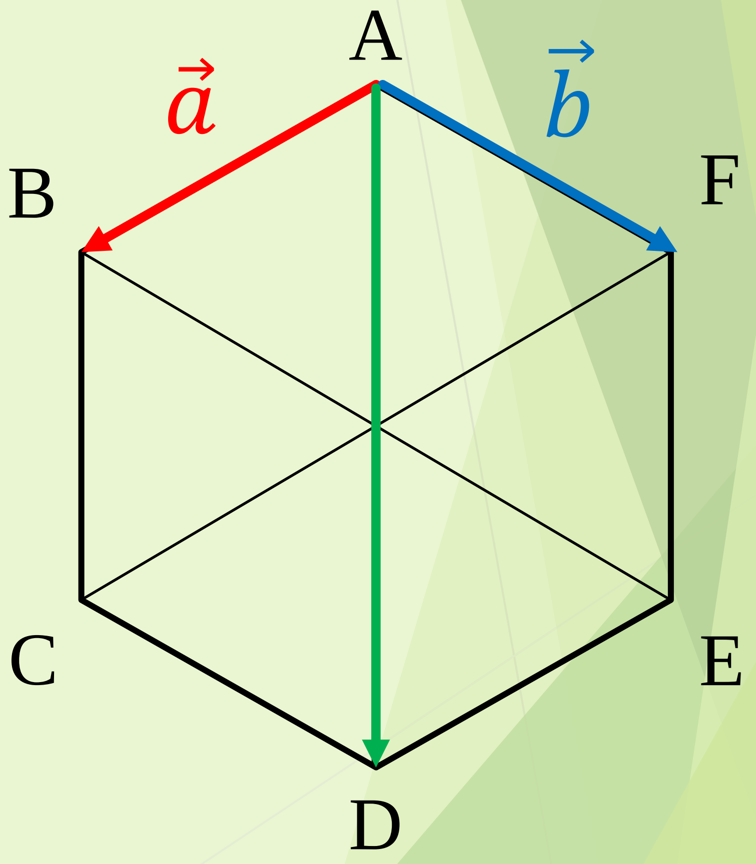
(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$

Voiced by https://coefont.studio

ベクトルの実数倍，和と差

例題２　図のような正六角形において
$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AF} = \vec{b}$ とするとき，次の
ベクトルを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表しましょう



(1)　$\overrightarrow{AD}$

(2)　$\overrightarrow{CE}$

(3)　$\overrightarrow{AC}$

(4)　$\overrightarrow{DB}$

Voiced by https://coefont.studio

ベクトルの実数倍，和と差

例題２　図のような正六角形において

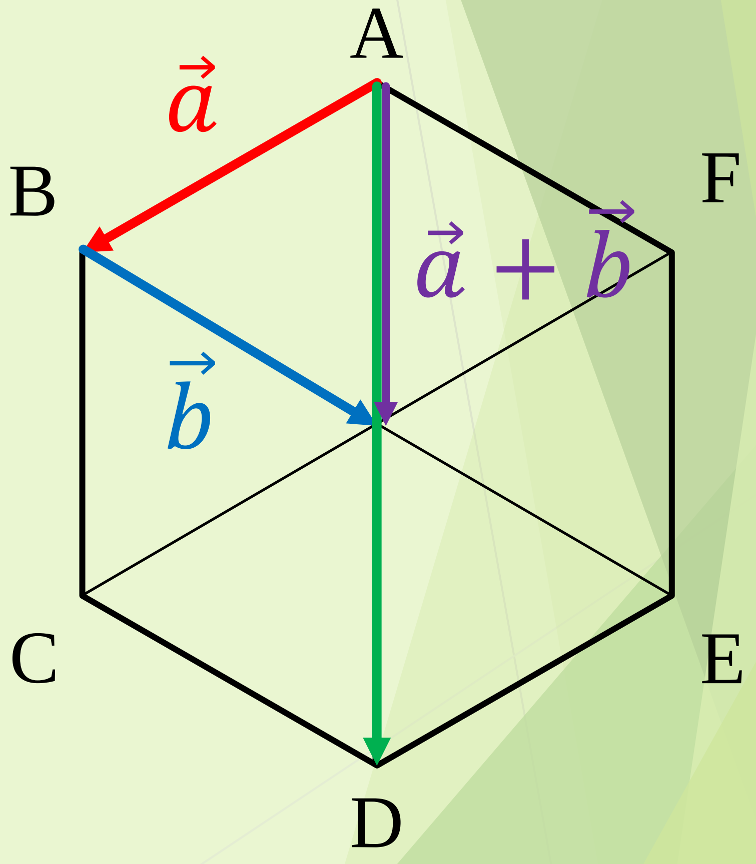
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表しましょう

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$



Voiced by https://coefont.studio

ベクトルの実数倍，和と差

例題２　図のような正六角形において

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次の

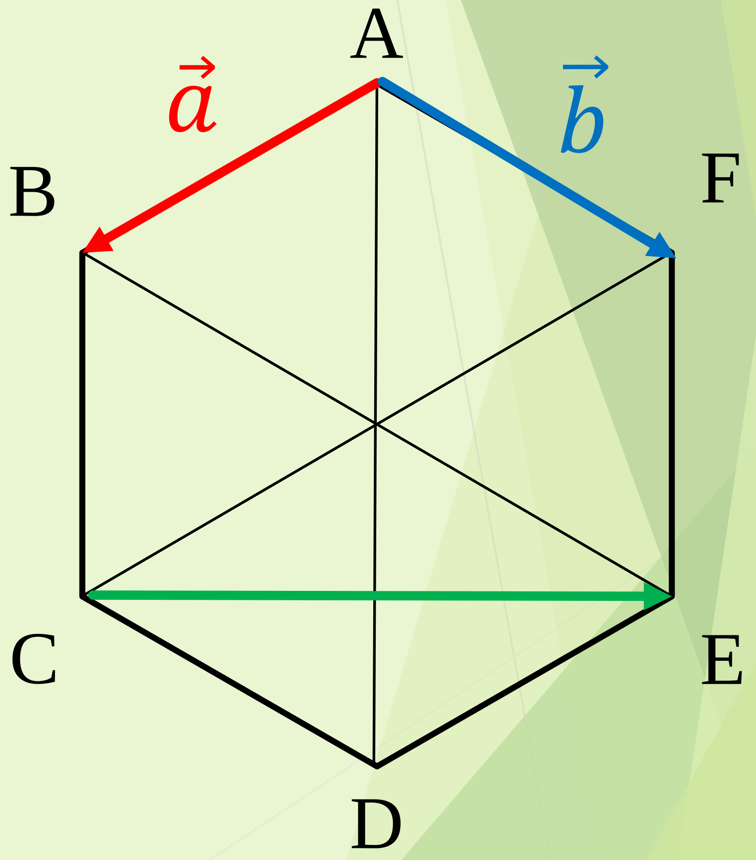
ベクトルを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表しましょう

(1)　$\overrightarrow{AD}=2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$

(2)　$\overrightarrow{CE}$

(3)　$\overrightarrow{AC}$

(4)　$\overrightarrow{DB}$



Voiced by https://coefont.studio

ベクトルの実数倍，和と差

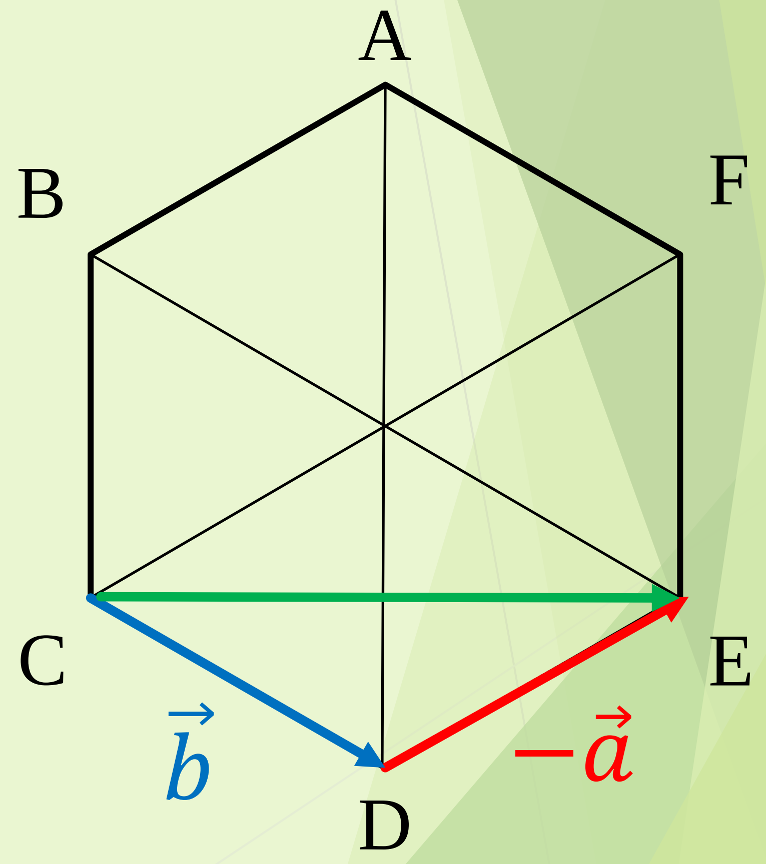
例題２　図のような正六角形において
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$ とするとき，次の
ベクトルを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表しましょう

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \vec{b} - \vec{a}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$



Voiced by https://coefont.studio

ベクトルの実数倍，和と差

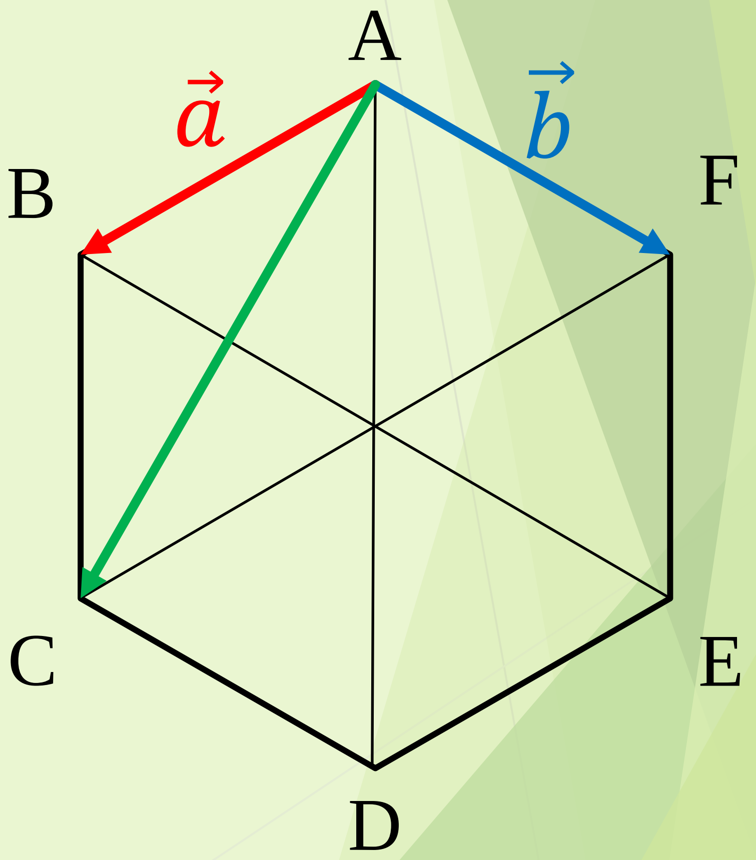
例題２　図のような正六角形において
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$ とするとき，次の
ベクトルを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表しましょう

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \vec{b} - \vec{a}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

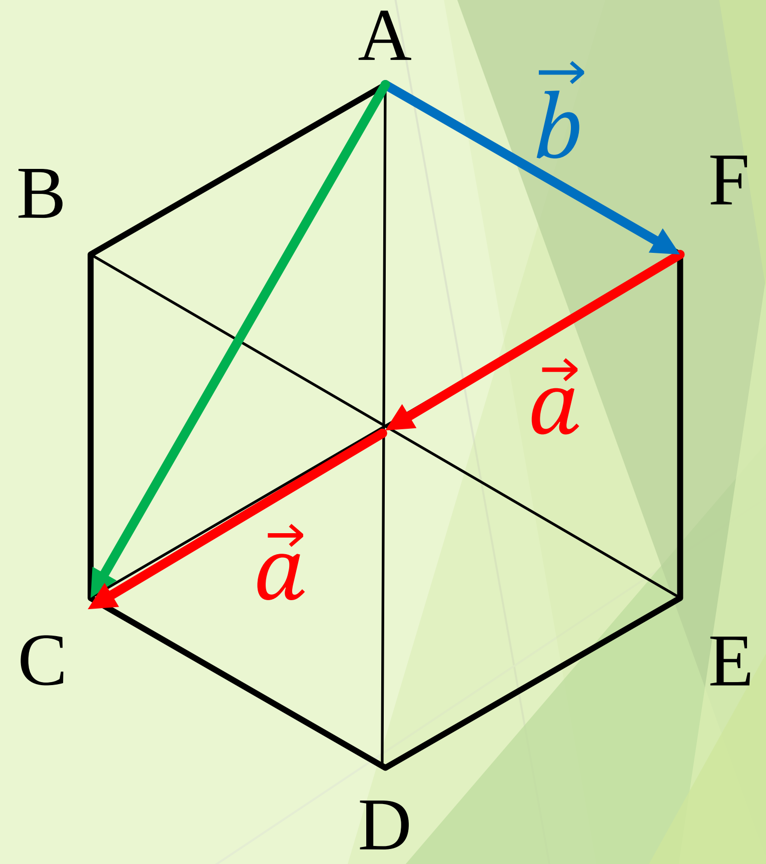
(4)　$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$



Voiced by https://coefont.studio

ベクトルの実数倍，和と差

例題２　図のような正六角形において
$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AF} = \vec{b}$ とするとき，次の
ベクトルを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表しましょう



(1)　$\overrightarrow{AD} = 2(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$

(2)　$\overrightarrow{CE} = \vec{b} - \vec{a}$

(3)　$\overrightarrow{AC} = \vec{b} + 2\vec{a} \left(= 2\vec{a} + \vec{b}\right)$

(4)　$\overrightarrow{DB}$

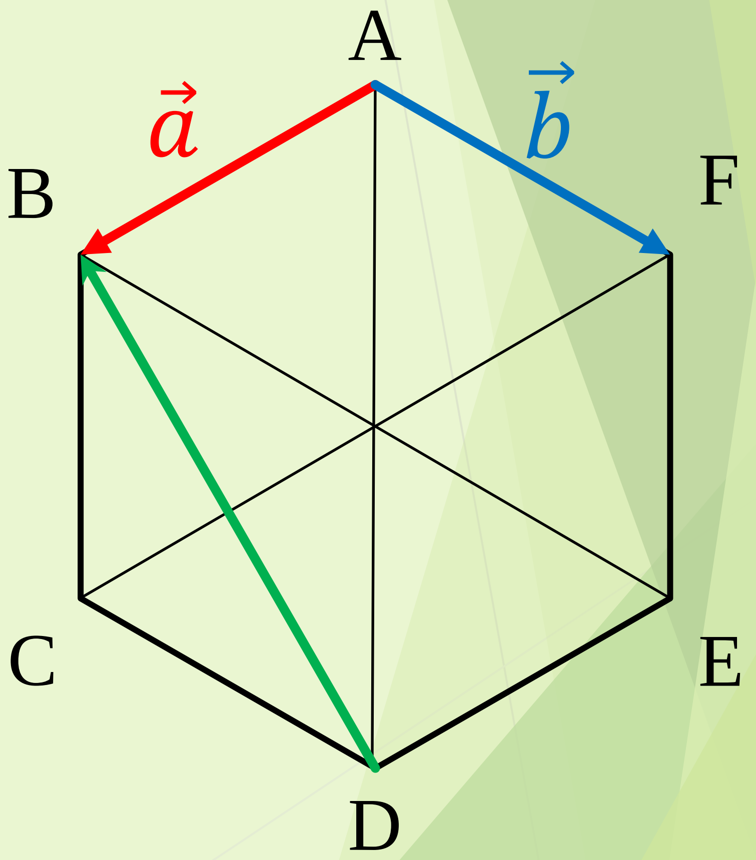
Voiced by https://coefont.studio

ベクトルの実数倍，和と差

例題２　図のような正六角形において

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$ とするとき，次の

ベクトルを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表しましょう



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \vec{b} - \vec{a}$

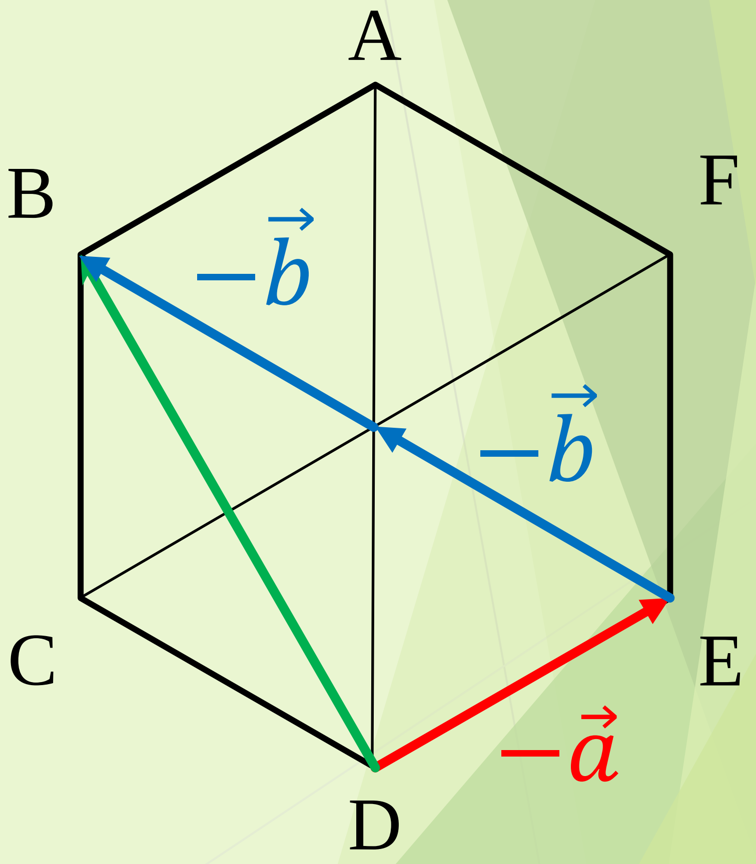
(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{b} + 2\vec{a}\left(= 2\vec{a} + \vec{b}\right)$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$

Voiced by https://coefont.studio

ベクトルの実数倍，和と差

例題２　図のような正六角形において
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$ とするとき，次の
ベクトルを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表しましょう



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$

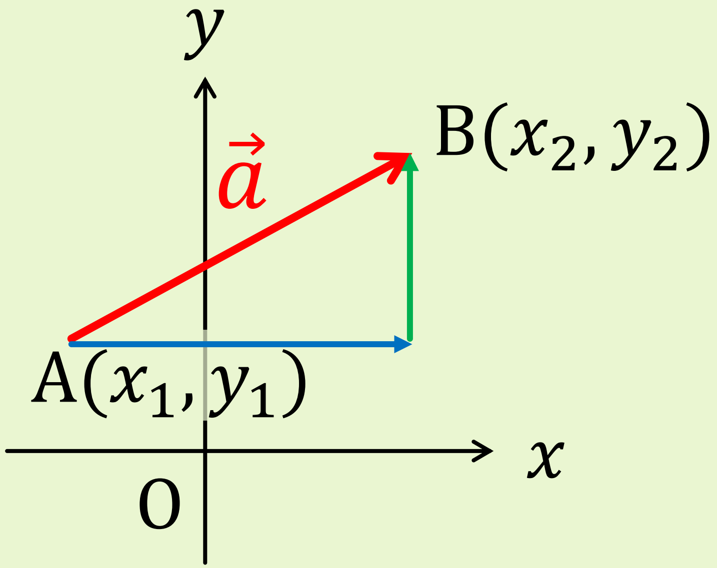
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \vec{b} - \vec{a}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{b} + 2\vec{a}\left(= 2\vec{a} + \vec{b}\right)$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{DB}} = -\vec{a} - 2\vec{b}$

Voiced by https://coefont.studio

ベクトルの成分表示



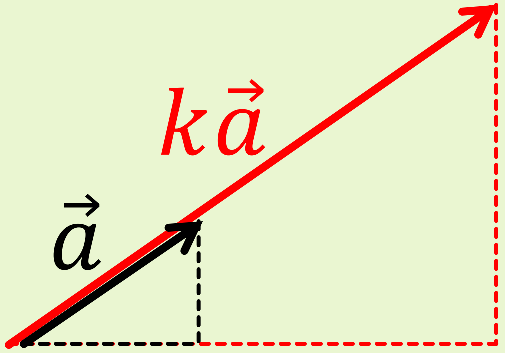
$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (\boxed{x_2 - x_1}, \boxed{y_2 - y_1})$$

行ベクトル

x 成分　　y 成分

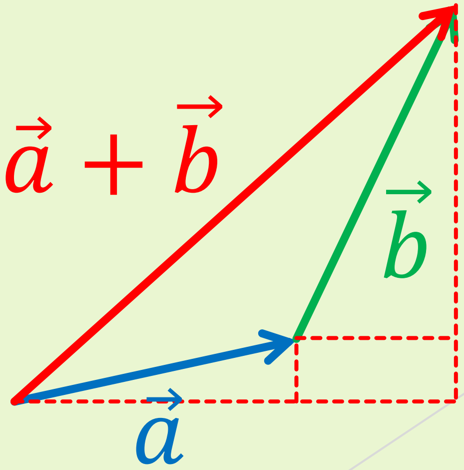
$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ または $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

列ベクトル



$\vec{a} = (x_1, y_1)$

$k\vec{a} = (kx_1, ky_1)$



$\vec{a} = (x_1, y_1)$

$\vec{b} = (x_2, y_2)$

$\vec{a} + \vec{b}$

$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Voiced by https://coefont.studio

成分によるベクトルの計算

例題３　$\vec{a}=(1,3),\vec{b}=(-2,1)$ であるとき，次のベクトルを成分表示しましょう

(1)　$3\vec{a}+2\vec{b}$

$$=3(1,3)+2(-2,1)=(3,9)+(-4,2)=(-1,11)$$

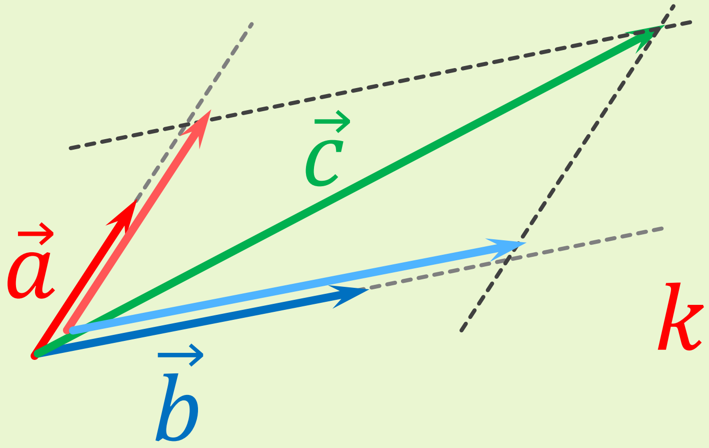
(2)　$2\vec{a}-5\vec{b}$

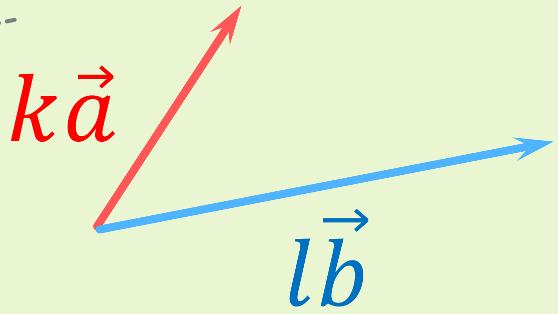
$$=2(1,3)-5(-2,1)=(2,6)+(10,-5)=(12,1)$$

Voiced by https://coefont.studio

ベクトルの線形独立性

例題４　図の $\vec{c}$ を，$\vec{a}$ 及び $\vec{b}$ と同じ方向の２つのベクトルに分解しましょう





$$\boldsymbol{\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}}$$

例題５　$\vec{a} = (2, 1)$，$\vec{b} = (-1, 2)$ のとき，$\vec{c} = (3, 4)$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の線形結合で表しましょう

$(3, 4) = k(2, 1) + l(-1, 2)$ とする

$(3, 4) = (2k, k) + (-l, 2l)$

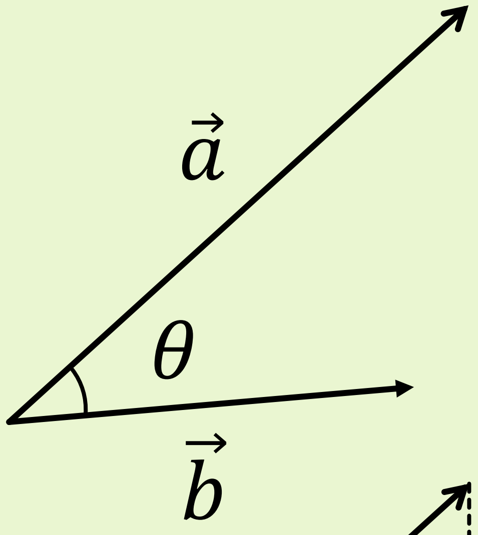
$(3, 4) = (2k - l, k + 2l)$

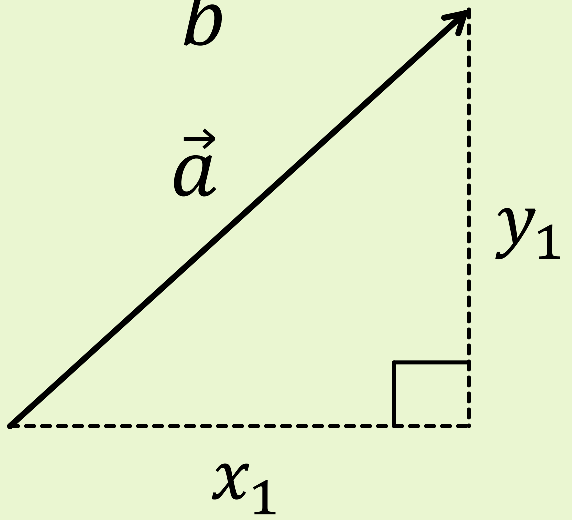
$$\begin{cases} 2k - l = 3 \\ k + 2l = 4 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} k = 2 \\ l = 1 \end{cases}$$

$$\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$$

Voiced by https://coefont.studio

ベクトルの内積





$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \vec{a}\cdot\vec{b}$$

$\vec{a} = (x_1, y_1) \quad \vec{b} = (x_2, y_2)$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

Voiced by https://coefont.studio

ベクトルの内積

例題６　次の２つのベクトルのなす角をθとして，
　　　$\cos\theta$を求めましょう

(1)　$\vec{a} = (1, 3),\ \ \vec{b} = (5, -2)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{1^2 + 3^2}\sqrt{5^2 + (-2)^2}\cos\theta = 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-2)$$

$$\therefore\ \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{290}} \qquad \theta = 93.4^\circ$$

(2)　$\vec{a} = (-1, 3),\ \ \vec{b} = (2, -1)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2}\sqrt{2^2 + (-1)^2}\cos\theta = -1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)$$

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \theta = 45^\circ$$

Voiced by https://coefont.studio