高校数学の復習

第14回
微　分　法

Voiced by https://coefont.studio

本時の目標

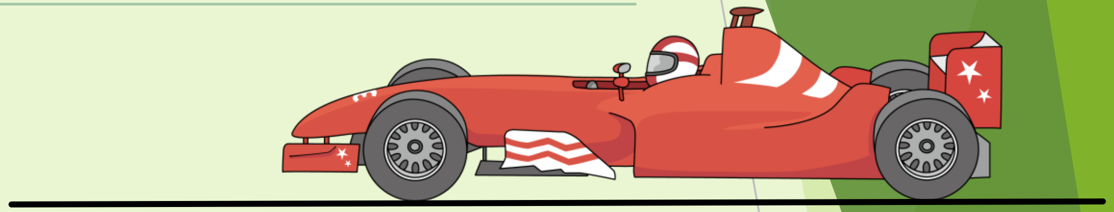
１　平均変化率と，その極限である微分係数の意味を理解します

２　微分係数と導関数の関係を理解し，整関数（多項式で表される関数）の導関数を求められるようになります

３　整関数の導関数から，その関数の増減を読み取れるようになります

微分法とは

$$速さ = \frac{移動距離}{所要時間}$$



（単位：〇〇m/秒・〇〇km/時）

平均の速さ

100mを10秒で走ると，平均 36km/時

トップスピードになったときに，1/100秒のコマ撮りで撮影したところ12.5cm進んでいた → 平均45km/時

1/100秒 → 1/1000秒 → 1/10000秒 →　瞬間の速さ

ΔT 秒間に ΔL メートル進むとする

$$\lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta T} = 瞬間の速さ$$

平均変化率と微分係数

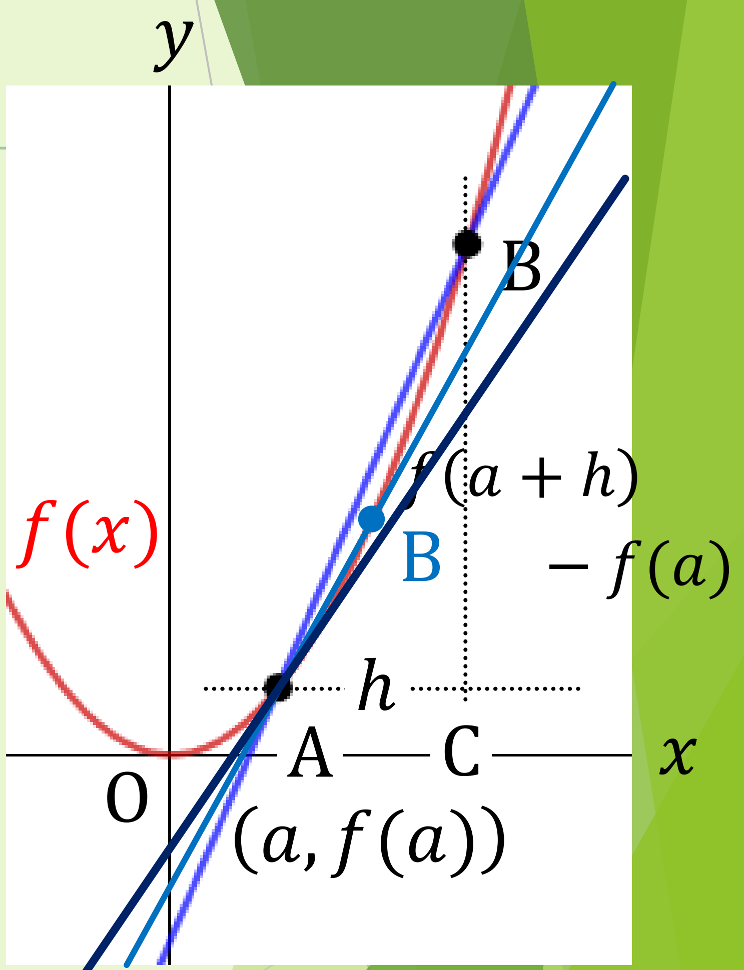
$\mathrm{A}(a, f(a))$,　$\mathrm{AC} = h$　とすると

$\mathrm{C}(a+h, f(a))$,　$\mathrm{B}(a+h, f(a+h))$

$\mathrm{BC} = f(a+h) - f(a)$

直線 AB 傾き：$\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

x の値が a から $a+h$ まで変化したときの**平均変化率**



点 B→点 A のとき，直線 AB→点 A における接線

点 B → 点 A ⇔ $h \to 0$　　$\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$：点 A における接線の傾き

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$　$x = a$ における微分係数

Voiced by https://coefont.studio

微分係数

例題１　$f(x)=x^2$ として，次の微分係数を求めましょう

(1)　$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1+2h+h^2-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to0}(2+h)=2$$

(2)　$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2ah+h^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}(2a+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to0}(2a+h)=2a$$

導関数

$f(x)=x^2$ のとき，$f'(a)=2a$ $\rightarrow f'(x)=2x$：$f(x)$ の導関数

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ とは，$f(x)$ の微分係数を与える関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$(x^2)'=2x$ $(c)'=0$ $(x)'=1$ $(x^3)'=3x^2$

$$(x^3)'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^3}+3x^2h+3xh^2+h^3-\cancel{x^3}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3x^2+3xh+h^2)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

微分演算の線形性

$(c)' = 0 \quad (x)' = 1 \quad (x^2)' = 2x \quad (x^3)' = 3x^2 \quad \rightarrow (x^n)' = nx^{n-1}$

$$\boxed{\{af(x) + bg(x)\}' = af'(x) + bg'(x)}$$

$y = x^2 + 3x + 2 \quad y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ を微分することができない

$$\begin{aligned}
\{af(x) + bg(x)\}' &= \lim_{h\to 0} \frac{\{af(x+h) + bg(x+h)\} - \{af(x) + bg(x)\}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a\{f(x+h) - f(x)\} + b\{g(x+h) - g(x)\}}{h} \\
&= a\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + b\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= af'(x) + bg'(x)
\end{aligned}$$

２次式・３次式の導関数

例題２　次の関数を微分しましょう

(1)　$y = x^2 + 3x + 2$

$y' = (x^2)' + 3(x)' + (2)' = 2x + 3$

(2)　$y = x^3 - 2x^2 + x + 3$

$y' = (x^3)' - 2(x^2)' + (x)' + (3)' = 3x^2 - 4x + 1$

(3)　$y = (x+1)(x^2+1) = x^3 + x^2 + x + 1$

$y' = (x^3)' + (x^2)' + (x)' + (1)' = 3x^2 + 2x + 1$

グラフの接線

例題３　２次関数 $y = x^2 - 3x + 2$ のグラフの，グラフ上の点 $(3, 2)$ における接線の方程式を求めましょう

グラフの接線の傾き＝微分係数

点 (x_0, y_0) を通って傾き m の直線の方程式

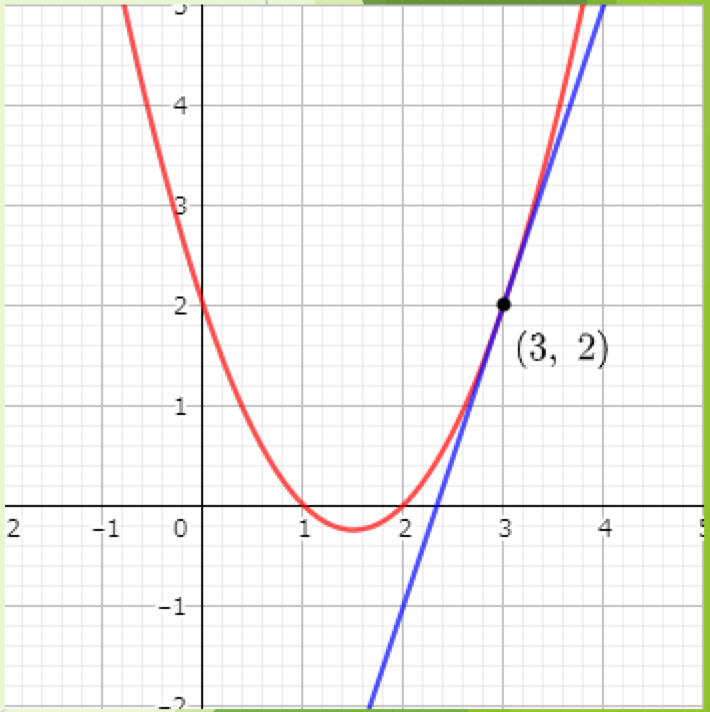
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$y = x^2 - 3x + 2$　を微分して　$y' = 2x - 3$

$$y'\Big|_{x=3} = 2 \cdot 3 - 3 = 3$$

したがって，求める接線の方程式は

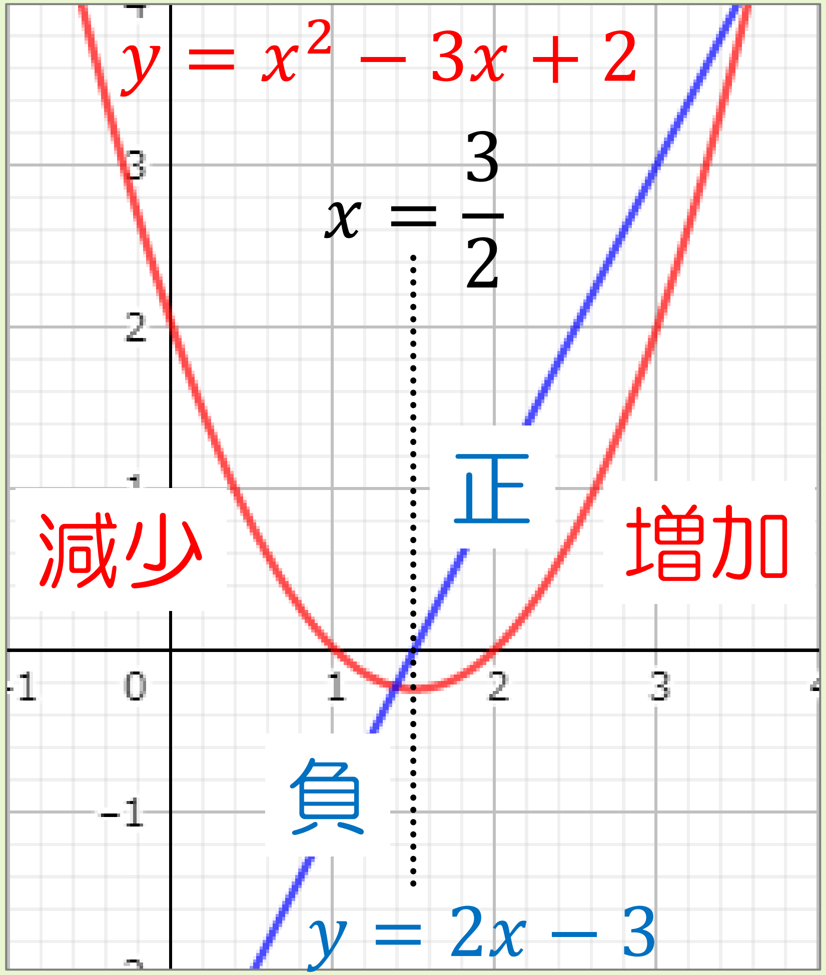
$$y - 2 = 3(x - 3) \qquad \therefore\ y = 3x - 7$$



Voiced by https://coefont.studio

関数の値の増減

$y = x^2 - 3x + 2$　　$y' = 2x - 3$



$y = x^2 - 3x + 2$ のグラフの接線の傾きが

$x > \frac{3}{2}$ の区間で正，　$x < \frac{3}{2}$ の区間で負

関数の値が増加　　関数の値が減少

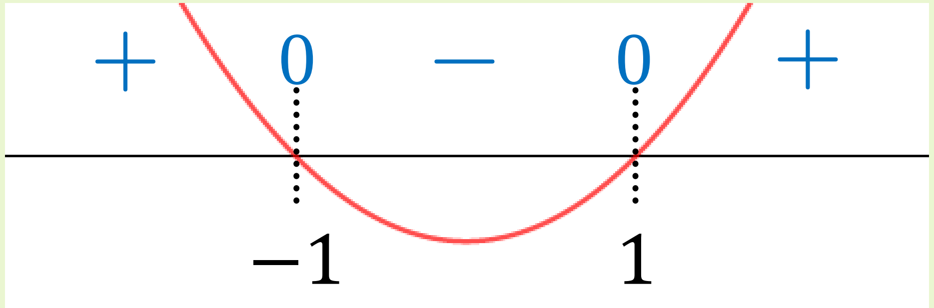
導関数の符号	関数の値の増減
$f'(x) > 0$	$f(x)$ は増加
$f'(x) < 0$	$f(x)$ は減少

Voiced by https://coefont.studio

３次関数のグラフ

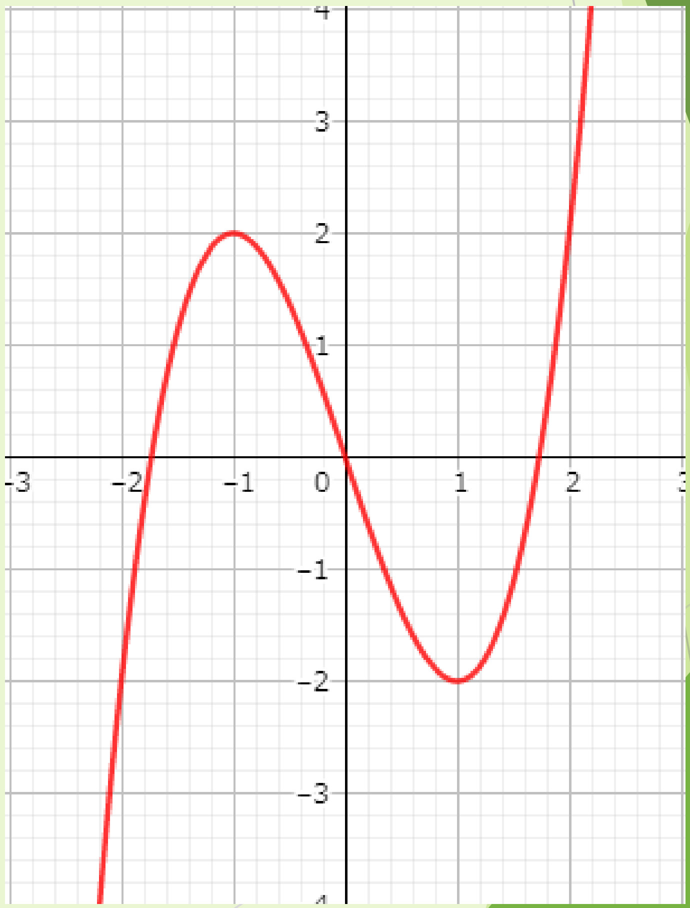
例題４　３次関数 $y = x^3 - 3x$ のグラフを描きましょう

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$



x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	2	↘	-2	↗

極大値　極小値

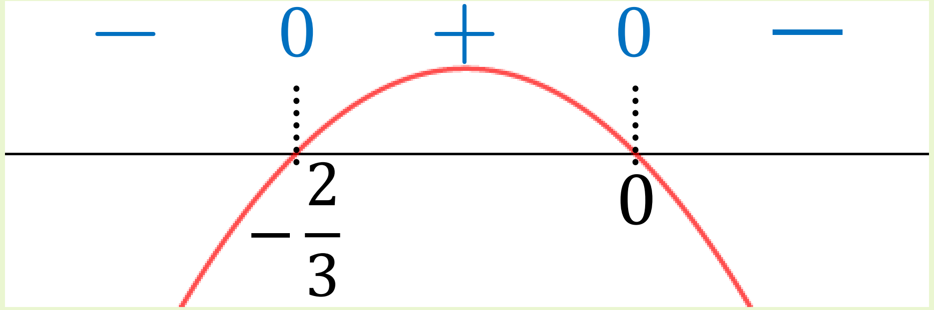


Voiced by https://coefont.studio

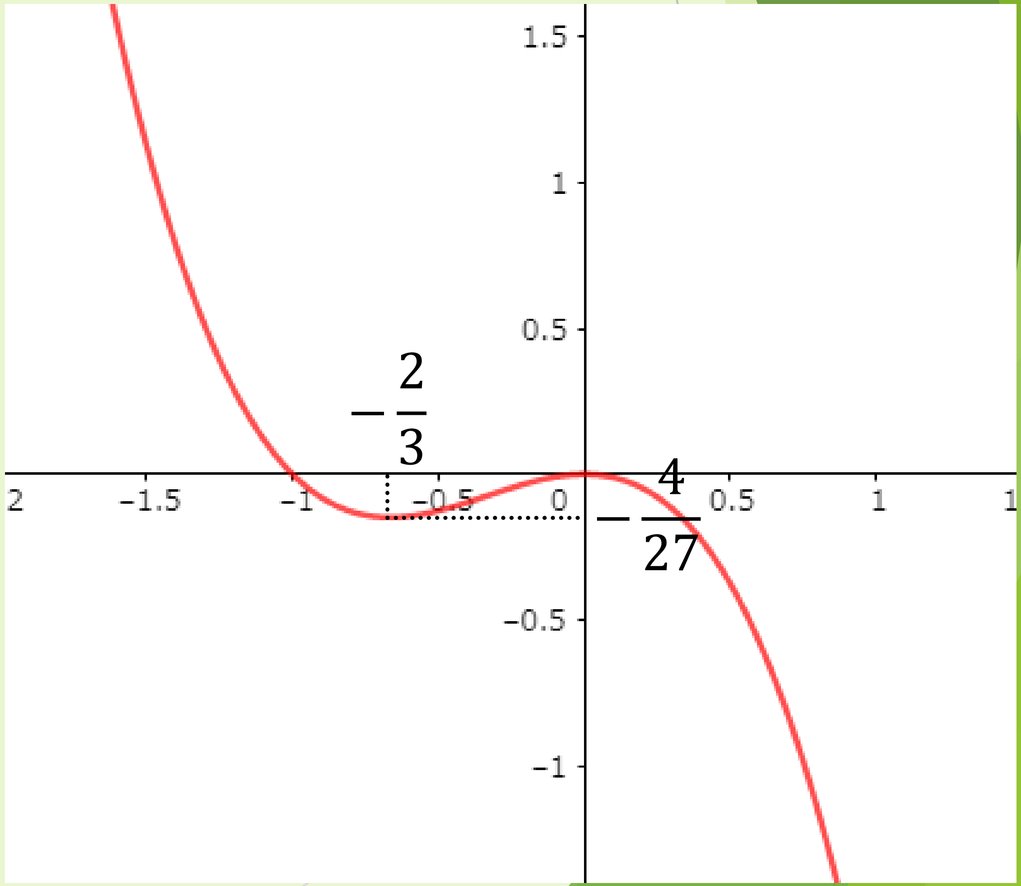
３次関数のグラフ

例題５　３次関数 $y=-x^3-x^2$ のグラフを描きましょう

$$y' = -3x^2 - 2x = -x(3x+2)$$



x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$-\frac{4}{27}$	↗	0	↘



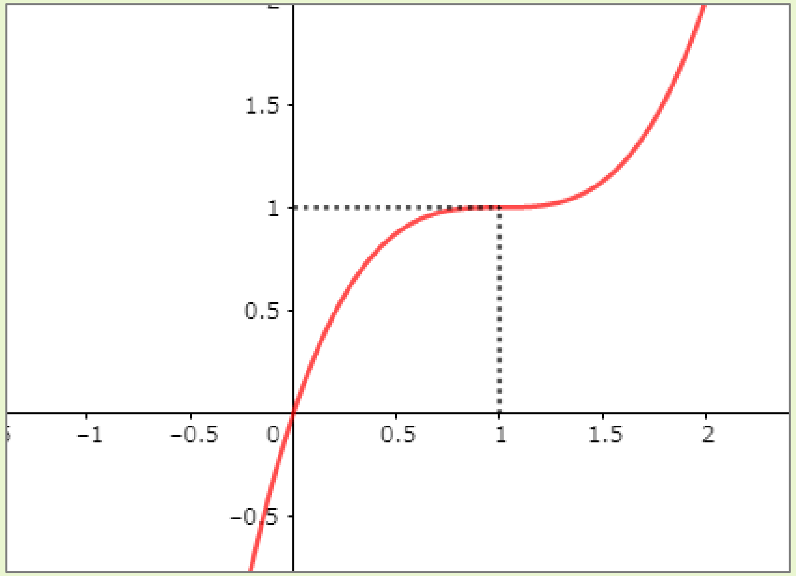
３次関数のグラフ

例題６　３次関数 $y = x^3 - 3x^2 + 3x$，$y = x^3 + x$ のグラフを描きましょう

$y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$

$y' \geq 0$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$+$
y	$\nearrow$	1	$\nearrow$



$y' = 3x^2 + 1 > 0$

$y = x^3 + x$ は単調に増加します