# 高校数学の復習

## 第15回
## 積　分　法

Voiced by https://coefont.studio

# 本時の目標

１　微分の逆の演算として不定積分を求められるようになります

２　不定積分から定積分の値を求められるようになります

３　定積分と面積の関係を理解し，関数のグラフで囲まれた図形の面積を求められるようになります

Voiced by https://coefont.studio

# 原始関数と不定積分

関数 $F(x)$ が $F'(x)=f(x)$ をみたすとき,

関数 $F(x)$ を関数 $f(x)$ の原始関数という

$(x^2)'=2x$　ゆえに，$x^2$ は $2x$ の原始関数の一つ

$(x^2+1)'=2x$，$(x^2+2)'=2x$

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$ （不定積分，$C$：積分定数）

$(x^n)'=nx^{n-1}$　　$(x^{n+1})'=(n+1)x^n$　　$\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=x^n$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

# 不定積分

$$\{af(x)+bg(x)\}' = af'(x)+bg'(x)$$

$$\int \{af(x)+bg(x)\}\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$$

例題１ $\displaystyle \int (x^2+2x+3)\,dx = \int x^2\,dx + 2\int x\,dx + 3\int dx$

$$= \frac{1}{3}x^3 + 2\cdot\frac{1}{2}x^2 + 3x + C = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + C$$

例題２ $\displaystyle \int (2x-1)(x+2)\,dx = \int (2x^2+3x-2)\,dx$

$$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$$

Voiced by https://coefont.studio

# 定積分

$\int_a^b f(x)\,dx$　$f(x)$ を $a$ から $b$ まで積分する

$F'(x) = f(x)$　$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

例題３　$\int_1^3 (x^2 + 2x + 3)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]$

# 定積分

$\int_a^b f(x)\,dx$　$f(x)$ を $a$ から $b$ まで積分する

$F'(x) = f(x)$　$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

例題３　$\int_1^3 (x^2 + 2x + 3)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_1^3$

$$= \left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 + 3^2 + 3\cdot 3\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 + 1^2 + 3\cdot 1\right) = \frac{68}{3}$$

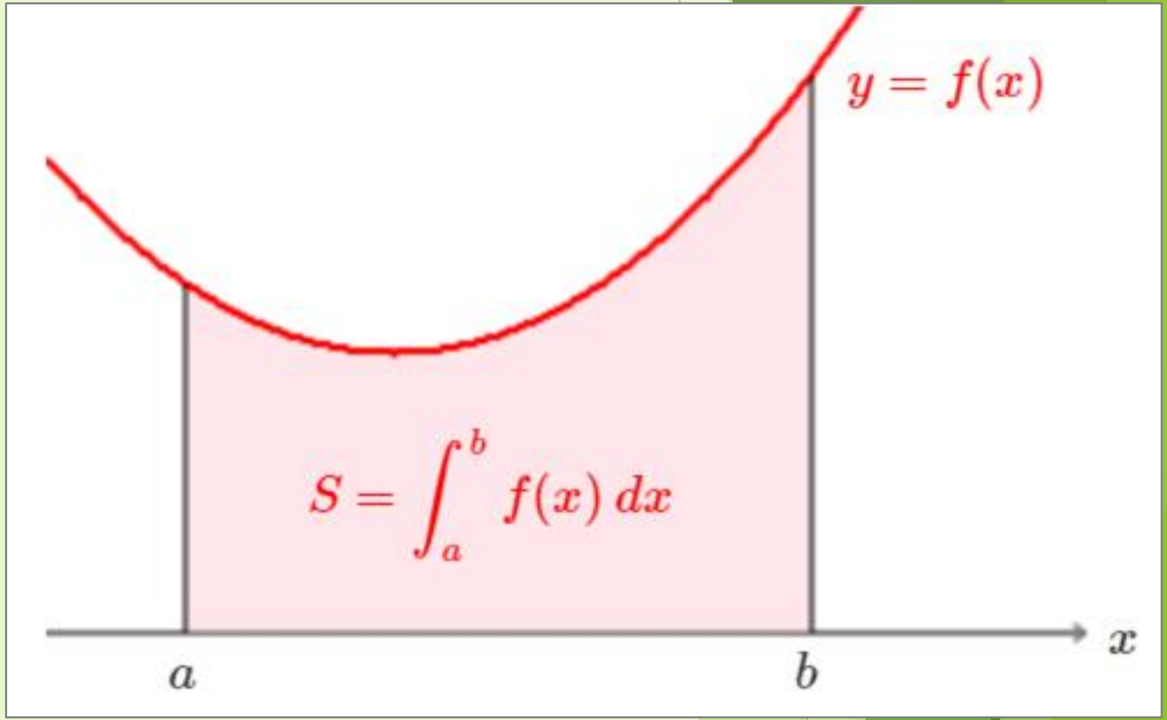
# 定積分の意味

## 定積分と面積

関数 $y = f(x)$ が $a \leq x \leq b$ において連続であり，$f(x) \geq 0$ をみたしているとき，２直線 $x = a$，$x = b$ と $x$ 軸，$y = f(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積は定積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

の値に等しくなる

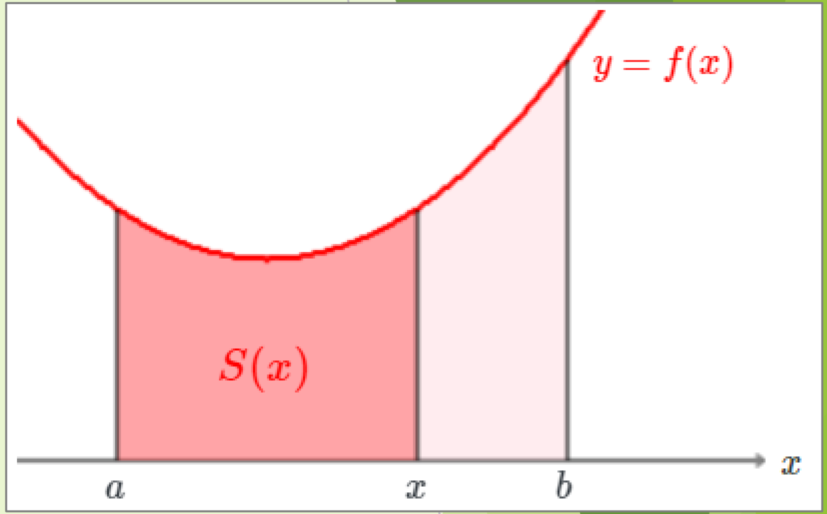


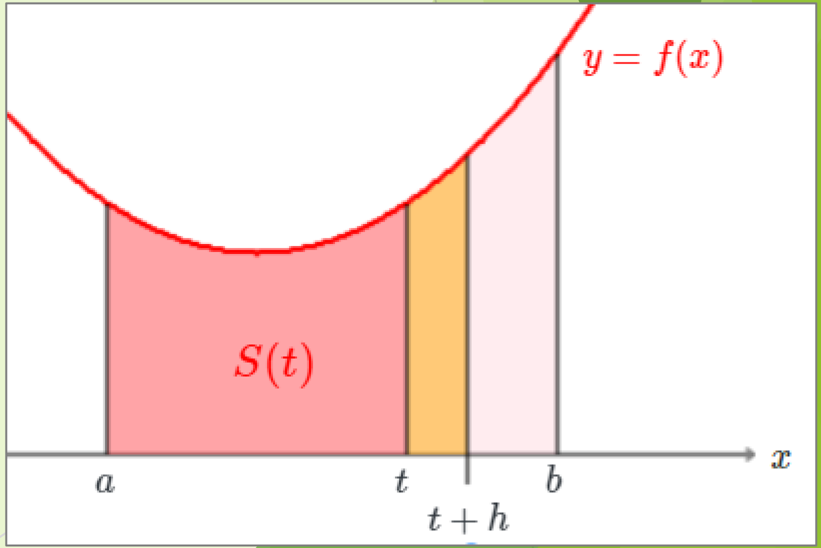
# 定積分の意味

$a \leq x \leq b$ である変数 $x$ をとり，右の図の濃い赤色で塗った部分の面積を $S(x)$ とする

この状況で，$x$ の値が $t$ から $t+h$ に変化したときの $S(x)$ の増分を考えます

$$S(t+h) - S(t)$$

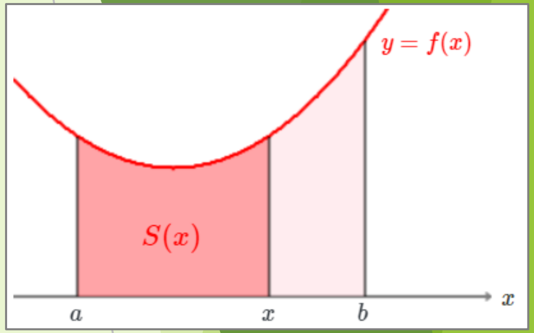



Voiced by https://coefont.studio

# 定積分の意味

$a \leq x \leq b$ である変数 $x$ をとり，右の図の濃い赤色で塗った部分の面積を $S(x)$ とする



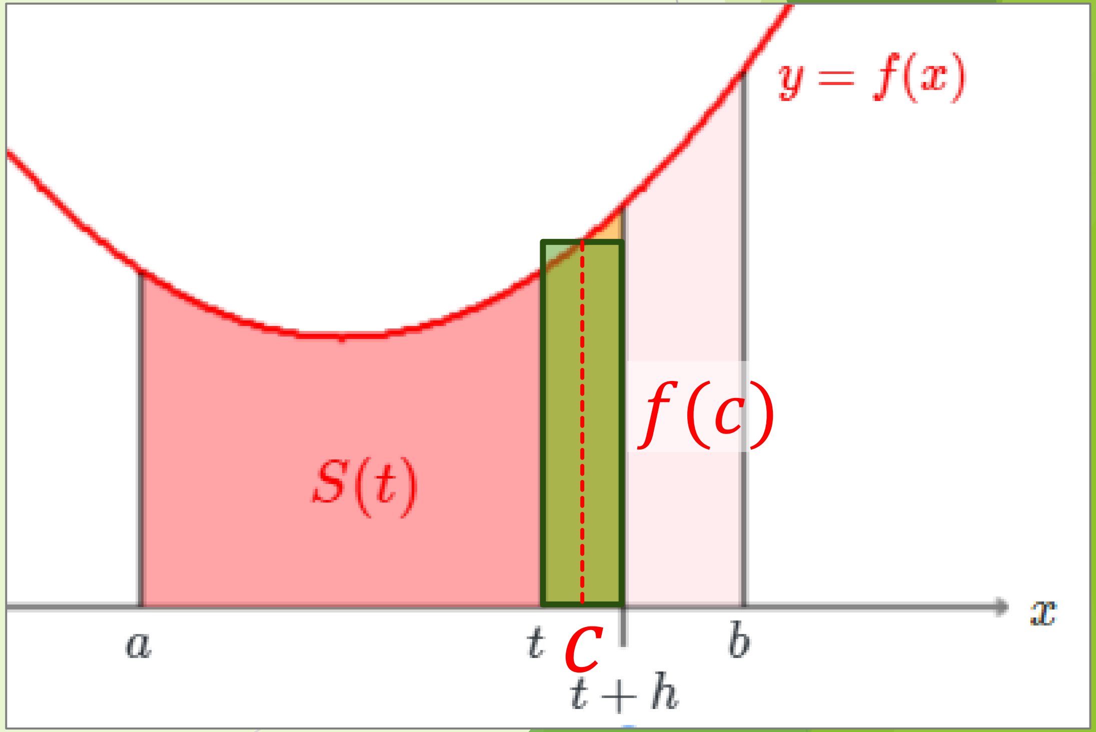

この状況で，$x$ の値が $t$ から $t+h$ に変化したときの $S(x)$ の増分を考える

$$S(t+h) - S(t)$$

図に示したように，幅が $h$ で，面積が黄色の部分と同じである長方形を描ける

$$S(t+h) - S(t) = h \times f(c)$$

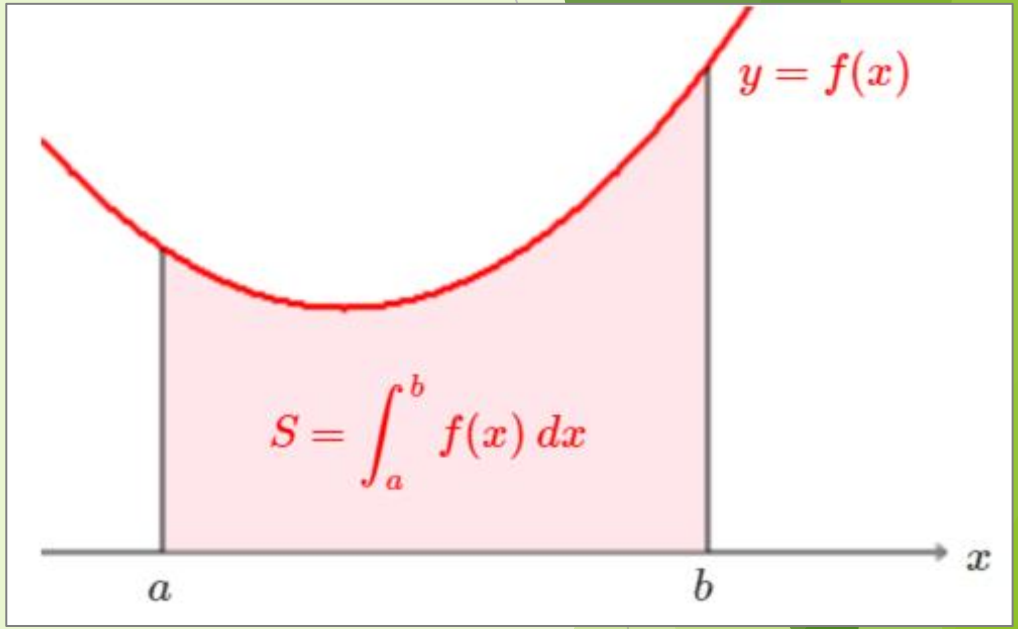
$$t \leq c \leq t+h$$



# 定積分の意味

$S(t+h)-S(t)=h\times f(c)\ \cdots(1)$

$t\leq c\leq t+h\ \cdots(2)$




$$\frac{S(t+h)-S(t)}{h}=f(c)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h}=\lim_{h\to 0}f(c)$$

$S'(t)=f(t)$ $S(x)$ は $f(x)$ の原始関数である

$S(x)=F(x)+C$ $\therefore\ C=-F(a)$ $S(x)=F(x)-F(a)$

$$S=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

# 面積

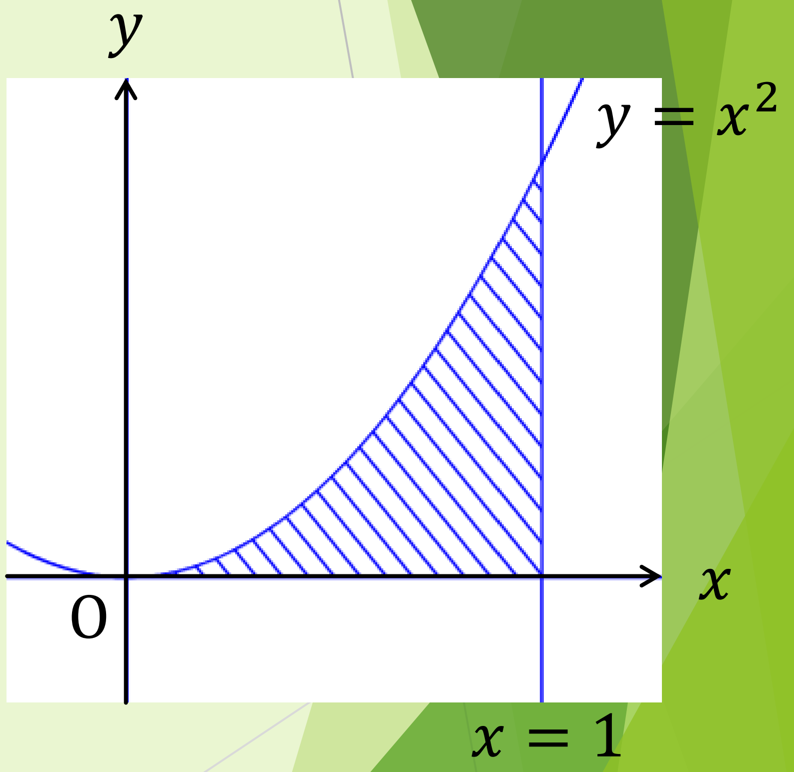
例題４　$y=x^2$，$x$ 軸，直線 $x=1$ で囲まれる図形の面積

$0 \leq x \leq 1$ で $y=x^2 \geq 0$

$$\therefore\ S=\int_0^1 x^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}$$



# 面積

例題５　$y=x^2+2x-3$ と $x$ 軸で囲まれる図形の面積

$x^2+2x-3=0$ とすると

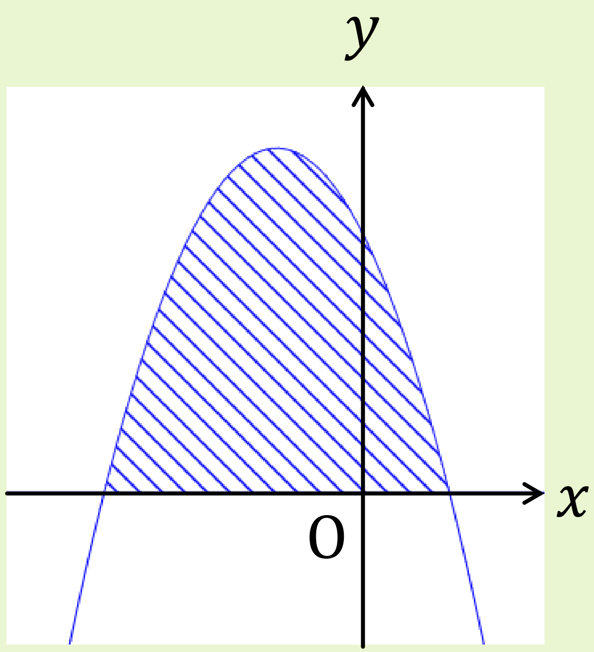
$(x+3)(x-1)=0$ より $x=-3,\ 1$

$$S=\int_{-3}^{1}(-y)\,dx$$

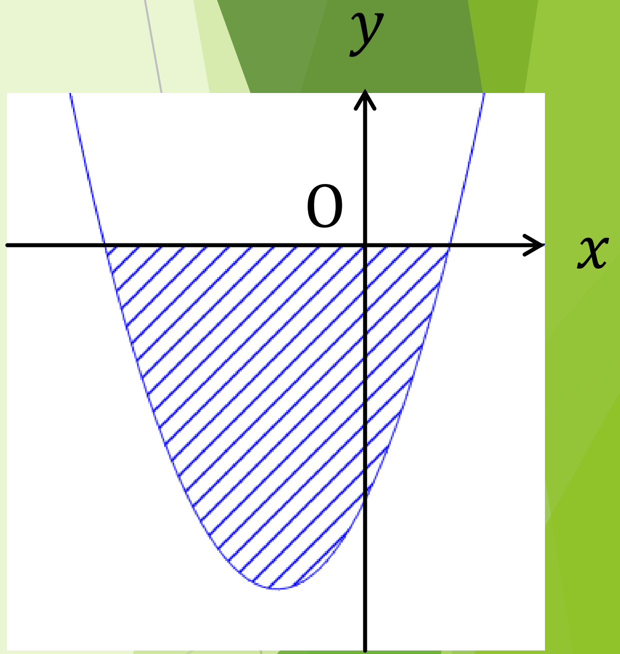
$$=\int_{-3}^{1}(-x^2-2x+3)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-3}^{1}$$

$$=\frac{32}{3}$$




$y=-x^2-2x+3$




$y=x^2+2x-3$

# 面積

例題６　$y=x^2-2$ と $y=x$ で囲まれる図形の面積

$x^2-2=x$

$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1,2$

$\begin{cases} y=x+k \\ y=x^2-2+k \end{cases}$

$$S=\int_{-1}^{2}(x+k)\,dx$$

$$-\int_{-1}^{2}(x^2-2+k)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\{(x+k)-(x^2-2+k)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\{x-(x^2-2)\}\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{9}{2}$$