Leibnitz

$$\{f(x)\cdot g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x) \quad \cdots \quad (*)$$

1 準備

$${}_n\mathrm{C}_k + {}_n\mathrm{C}_{k-1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_k$$

$$\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_k + {}_n\mathrm{C}_{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!\cdot(k-1)!} \\
&= \frac{n!\cdot(n-k+1)}{(n-k+1)!\cdot k!} + \frac{n!\cdot k}{(n-k+1)!\cdot k!} \\
&= \frac{n!\cdot(n+1)}{(n-k+1)!\cdot k!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\cdot k!} \\
&= {}_{n+1}\mathrm{C}_k
\end{aligned}$$

2 Leibnitz

(1) $\{f(x)\cdot g(x)\}' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ が成り立つ。

(2) $(*)$ が成り立つと仮定する。

(3) $\{f(x)\cdot g(x)\}^{(n+1)}$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left\{f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)\right\}'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left\{f^{(n-k+1)}(x)\cdot g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k+1)}(x)\right\}$$

$$= {}_n\mathrm{C}_0 f^{(n+1)}(x)\cdot g(x) + \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_n f^{(n-k+1)}\cdot g^{(k)}(x)$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} {}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}\cdot g^{(k+1)}(x) + {}_n\mathrm{C}_n f(x)\cdot g^{(n+1)}$$

$$
\begin{aligned}
&= {}_n\mathrm{C}_0 f^{(n+1)}(x)\cdot g(x) + \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k+1)}\cdot g^{(k)}(x) \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_{k-1} f^{(n-k+1)}\cdot g^{(k)}(x) + {}_n\mathrm{C}_n f(x)\cdot g^{(n+1)} \\
&= {}_n\mathrm{C}_0 f^{(n+1)}(x)\cdot g(x) + \sum_{k=1}^{n} \left({}_n\mathrm{C}_k + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\right) f^{(n-k+1)}\cdot g^{(k)}(x) \\
&\qquad\qquad + {}_n\mathrm{C}_n f(x)\cdot g^{(n+1)} \\
&= {}_{n+1}\mathrm{C}_0 f^{(n+1)}(x)\cdot g(x) + \sum_{k=1}^{n} {}_{n+1}\mathrm{C}_k f^{(n-k+1)}\cdot g^{(k)}(x) \\
&\qquad\qquad + {}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} f(x)\cdot g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}\mathrm{C}_k f^{(n+1-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)
\end{aligned}
$$

以上，(1)〜(3) により任意の自然数 n で $(*)$ の成り立つことが示された。